Bài tập toán cao cấp
Tập 2

Nguyễn Thủy Thanh

NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2007, 158 Tr.

Từ khoá: Bài tập toán cao cấp, Giới hạn dãy số, Giới hạn hàm số, Tính liên tục của hàm số, Hàm liên tục, Phép tính vi phân hàm một biến, Đạo hàm, Vi phân, Công thức Taylor, Đạo hàm riêng, Vi phân của hàm nhiều biến, Cực trị của hàm nhiều biến.

NGUYỄN THUỶ THANH

BÀI TẬP
TOÁN CAO CẤP

Tập 2

Phép tính vi phân các hàm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

Chương 7

Giới hạn và liên tục của hàm số

7.1 Giới hạn của dãy số

Hàm số xác định trên tập hợp $\mathbb{N}$ được gọi là dãy số vô hạn. Dãy số thường được viết dưới dạng:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{7.1}$$

hoặc $\{a_n\}$, trong đó $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ được gọi là số hạng tổng quát của dãy, n là số hiệu của số hạng trong dãy.

Ta cần lưu ý các khái niệm sau đây:

i) Dãy (7.1) được gọi là bị chặn nếu $\exists\, M \in \mathbb{R}^+ : \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \leqslant M$; và gọi là không bị chặn nếu: $\forall\, M \in \mathbb{R}^+ : \exists\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| > M$.

ii) Số a được gọi là giới hạn của dãy (7.1) nếu:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) : \forall\, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{7.2}$$

iii) Số a không phải là giới hạn của dãy (7.1) nếu:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N : \exists\, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| \geqslant \varepsilon. \tag{7.3}$$

iv) Dãy có giới hạn được gọi là dãy hội tụ, trong trường hợp ngược lại dãy (7.1) gọi là dãy phân kỳ.

v) Dãy (7.1) gọi là dãy vô cùng bé nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ và gọi là dãy vô cùng lớn nếu $\forall\, A > 0$, $\exists\, N$ sao cho $\forall\, n > N \Rightarrow |a_n| > A$ và viết $\lim a_n = \infty$.

vi) Điều kiện cần để dãy hội tụ là dãy đó phải bị chặn.

Chú ý: i) Hệ thức (7.2) tương đương với:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \tag{7.4}$$

Hệ thức (7.4) chứng tỏ rằng mọi số hạng với chỉ số $n > N$ của dãy hội tụ đều nằm trong khoảng $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, khoảng này gọi là ε-lân cận của điểm a.

Như vậy, nếu dãy (7.1) hội tụ đến số a thì mọi số hạng của nó trừ ra một số hữu hạn số hạng đều nằm trong ε-lân cận bất kỳ bé bao nhiêu tùy ý của điểm a.

ii) Ta lưu ý rằng dãy số vô cùng lớn không hội tụ và ký hiệu $\lim a_n = \infty$ $(-\infty)$ chỉ có nghĩa là dãy a_n là vô cùng lớn và ký hiệu đó hoàn toàn không có nghĩa là dãy có giới hạn.

7.1.1 Các bài toán liên quan tới định nghĩa giới hạn

Để chứng minh $\lim a_n = a$ bằng cách sử dụng định nghĩa, ta cần tiến hành theo các bước sau đây:

i) Lập biểu thức $|a_n - a|$

ii) Chọn dãy b_n (nếu điều đó có lợi) sao cho $|a_n - a| \leqslant b_n$ $\forall\, n$ và với ε đủ bé bất kỳ bất phương trình đối với n:

$$b_n < \varepsilon \tag{7.5}$$

có thể giải một cách dễ dàng. Giả sử (7.5) có nghiệm là $n > f(\varepsilon)$, $f(\varepsilon) > 0$. Khi đó ta có thể lấy n là $[f(\varepsilon)]$, trong đó $[f(\varepsilon)]$ là phần nguyên của $f(\varepsilon)$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử $a_n = n^{(-1)^n}$. Chứng minh rằng:

i) Dãy a_n không bị chặn.

ii) Dãy a_n không phải là vô cùng lớn.

Giải. i) Ta chứng minh rằng a_n thỏa mãn định nghĩa dãy không bị chặn. Thật vậy, $\forall\, M > 0$ số hạng với số hiệu $n = 2([M] + 1)$ bằng n và lớn hơn M. Điều đó có nghĩa là dãy a_n không bị chặn.

ii) Ta chứng minh rằng a_n không phải là vô cùng lớn. Thật vậy, ta xét khoảng $(-2, 2)$. Hiển nhiên mọi số hạng của dãy với số hiệu lẻ đều thuộc khoảng $(-2, 2)$ vì khi n lẻ thì ta có:

$$n^{(-1)^n} = n^{-1} = 1/n \in (-2, 2).$$

Như vậy trong khỏng $(-2, 2)$ có vô số số hạng của dãy. Từ đó, theo định nghĩa suy ra a_n không phải là vô cùng lớn. ▲

Ví dụ 2. Dùng định nghĩa giới hạn dãy số để chứng minh rằng:

$$1)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0. \qquad 2)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Giải. Để chứng minh dãy a_n có giới hạn là a, ta cần chứng minh rằng đối với mỗi số $\varepsilon > 0$ cho trước có thể tìm được số N (N phụ thuộc ε) sao cho khi $n > N$ thì suy ra $|a_n - a| < \varepsilon$. Thông thường ta có thể chỉ ra công thức tường minh biểu diễn N qua ε.

1) Ta có:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}\cdot$$

Giả sử ε là số dương cho trước tùy ý. Khi đó:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\cdot$$

Vì thế ta có thể lấy N là số tự nhiên nào đó thỏa mãn điều kiện:

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(Chẳng hạn, ta có thể lấy $N = [1/\varepsilon]$, trong đó $[1/\varepsilon]$ là phần nguyên của $1/\varepsilon$).

Khi đó $\forall\, n \geqslant N$ thì:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Điều đó có nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

2) Ta lấy số $\varepsilon > 0$ bất kỳ và tìm số tự nhiên $N(\varepsilon)$ sao cho $\forall\, n > N(\varepsilon)$ thì:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Bất đẳng thức

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Do đó ta có thể lấy số $N(\varepsilon)$ là phần nguyên của $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, tức là:

$$N(\varepsilon) = E((1/\varepsilon) - 1).$$

Khi đó với mọi $n \geqslant N$ ta có:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{N+1} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \ \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các dãy sau đây phân kỳ:

1) $$a_n = n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.6}$$

2) $$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.7}$$

3) $$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}\cdot \tag{7.8}$$

Giải. 1) Giả sử dãy (7.6) hội tụ và có giới hạn là a. Ta lấy $\varepsilon = 1$. Khi đó theo định nghĩa giới hạn tồn tại số hiệu N sao cho $\forall\, n > N$ thì ta có $|a_n - a| < 1$ nghĩa là $|n - a| < 1$ $\forall\, n > N$. Từ đó $-1 < n - a < 1$ $\forall\, n > N \Leftrightarrow a - 1 < n < a + 1$ $\forall\, n > N$.

Nhưng bất đẳng thức $n < a + 1$, $\forall\, n > N$ là vô lý vì tập hợp các số tự nhiên không bị chặn.

2) *Cách 1.* Giả sử dãy a_n hội tụ và có giới hạn là a. Ta lấy lân cận $\left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$ của điểm a. Ta viết dãy đã cho dưới dạng:

$$\{a_n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots. \tag{7.9}$$

Vì độ dài của khoảng $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ là bằng 1 nên hai điểm -1 và $+1$ không thể đồng thời thuộc lân cận $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ của điểm a, vì khoảng cách giữa -1 và $+1$ bằng 2. Điều đó có nghĩa là ở ngoài lân cận $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ có vô số số hạng của dãy và vì thế (xem chú ý ở trên) số a không thể là giới hạn của dãy.

Cách 2. Giả sử $a_n \to a$. Khi đó $\forall\, \varepsilon > 0$ (lấy $\varepsilon = \frac{1}{2}$) ta có

$$|a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall\, n \geqslant N.$$

Vì $a_n = \pm 1$ nên

$$\begin{aligned}
&|1-a| < \frac{1}{2}, \quad |-1-a| < \frac{1}{2}\\
\Rightarrow &2 = |(1-a)+(1+a)| \leqslant |1-a| + |a+1| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\\
\Rightarrow &2 < 1, \quad \text{vô lý.}
\end{aligned}$$

3) Lưu ý rằng với $n = 2m \Rightarrow a_{2m} = 1 + \frac{1}{2m}$. Số hạng kề với nó có số hiệu lẻ $2m+1$ (hay $2m-1$) và

$$a_{2m+1} = -1 + \frac{1}{2m+1} < 0 \quad (\text{hay } a_{2m-1} = -1 + \frac{1}{2m-1} \leqslant 0).$$

Từ đó suy rằng

$$|a_n - a_{n-1}| > 1.$$

Nếu số a nào đó là giới hạn của dãy (a_n) thì bắt đầu từ số hiệu nào đó (a_n) thỏa mãn bất đẳng thức $|a_n - a| < \frac{1}{2}$. Khi đó

$$|a_n - a_{n+1}| \leqslant |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Nhưng hiệu giữa hai số hạng kề nhau bất kỳ của dãy đã cho luôn luôn lớn hơn 1. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng không một số thực nào có thể là giới hạn của dãy đã cho. ▲